Moulay El Mehdi Falloul

Une introduction à la recherche opérationnelle et au management des projets

Edilivre

Introduction

La Recherche opérationnelle (RO) est une discipline qui traite de l'application des méthodes d'analyse avancées pour aider à prendre de meilleures décisions. Employant des techniques des sciences mathématiques, tels que la modélisation mathématique, l'analyse statistique, et l'optimisation mathématique, la recherche opérationnelle cherche des solutions optimales ou quasi optimale à des problèmes complexes de prise de décision.

La Recherche opérationnelle (RO) englobe un large éventail de problèmes techniques et des méthodes appliquées dans la poursuite de l'amélioration du processus décisionnel et d'efficacité, tels que la simulation, l'optimisation mathématique, la théorie des files d'attente et les processus stochastiques, les chaines de Markov, les méthodes économétriques, l'analyse des données, les réseaux de neurones, les systèmes experts, l'analyse décisionnelle et le processus de hiérarchie analytique. La quasi-totalité de ces techniques impliquent la construction de modèles mathématiques qui tentent de décrire le système.

Les principales sous-disciplines moderne de la recherche opérationnelle, tels que définis dans la revue recherche opérationnelle, sont entre autres : les technologies de l'informatique et de l'information, l'économie et la finance appliquée, le génie industriel, le management des projets, la gestion de la chaîne d'approvisionnement, la simulation, le transport et la logistique.

La Gestion de projet est le processus et l'activité de planification, d'organisation, de motivation, et de contrôle des ressources, des procédures et des protocoles pour atteindre des objectifs spécifiques dans les problèmes scientifiques ou quotidiennes. Un projet est un effort temporaire conçu pour produire un produit ou un marché (construction d'un bâtiment, conception d'un logiciel, etc) qui est généralement de durée limitée, et souvent limité par le financement suivant un cahier de charge spécifique. La gestion de projets utilise très souvent les techniques de la recherche opérationnelle dans les différents stades des projets.

Cet ouvrage, constituant une introduction aux disciplines de la recherche opérationnelle et du management des projets, se divise en trois chapitres, le premier chapitre est consacré la programmation linéaire et les chaines de Markov, le deuxième chapitre porte sur les techniques usuels de management des projets, et le troisième chapitre est consacré à la théorie des graphes.

Chapitre I
L'optimisation linéaire

I. Une introduction à l'optimisation linéaire

La programmation linéaire est un outil très important de la recherche opérationnelle. C'est un outil générique qui peut résoudre un grand nombre de problème de l'ingénierie de gestion. En effet, une fois un problème modélisé sous la forme d'équations linéaires, des méthodes assurent la résolution du problème de manière exacte. Les données et informations nécessaires à la résolution du problème sont supposées et connues d'une manière certaine. Ce qui place la programmation linéaire dans la famille d'aide à la décision en environnement certain. Les méthodes d'optimisation mathématiques sont aujourd'hui couramment utilisées dans le domaine des techniques industrielles et de l'ingénierie de gestion. Ces méthodes se caractérisent par le fait qu'elles permettent de tenir compte de contraintes données sous la forme d'inégalités. Généralement, on appelle programmation mathématique, la recherche de l'optimum d'une fonction de plusieurs variables liées entre elles par des contraintes liées entre elles par des contraintes sous forme d'égalités ou d'inégalités.

1. LES BASES MATHEMATIQUES DE LA PROGRAMMATION LINEAIRE

La Programmation linéaire se préoccupe de résoudre un problème mathématique, à savoir maximiser ou minimiser une fonction linéaire de n variables (appelés la fonction objective)

Avec m contraintes linéaires, qui est :

$$\max imiser \quad ou \quad \min imiser \ z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \cdots\cdots + c_n x_n$$

Sous contraintes

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{1,n}x_n \leq > b_1$$
$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{2,n}x_n \leq > b_2$$
$$a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{3,n}x_n \leq > b_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \leq > \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \leq > \ldots$$
$$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{m,n}x_n \leq > b_m$$

Et les contraintes triviales $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \ldots.\, x_n \geq 0.$

En termes matricielles, un modèle de programmation linéaire est :

$\max imiser \quad ou \quad \min imiser \ z = c^T \vec{x}$

Tel que $A\vec{x} \geq < \vec{b} \quad \vec{x} \geq 0$

Où A est une matrice $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \ldots & a_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix} \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \text{et } \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \ldots \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Les coefficients $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ sont appelés coefficients de coût.

La programmation linéaire est une technique mathématique largement utilisée, conçue pour aider les gestionnaires et les ingénieurs dans la planification et la prise de décisions relatives à l'affectation des ressources.

La programmation linéaire est si importante, parce que tant de problèmes différents dans de nombreux domaines diversifiés sont modélisé mathématiquement par le problème mathématique de programmation linéaire, à savoir :

$$\max imiser \quad ou \quad \min imiser \ z = c^T \vec{x}$$

Tel que :

$$A\vec{x} \geq < \vec{b} \quad \vec{x} \geq 0 .$$

En effet la solution des problèmes de programmation linéaire dans l'industrie, gouvernements et établissements universitaires partout dans le monde représente l'un de la plus grande quantité de temps de calcul en calcul scientifique (par opposition au traitement des données).

Voici quelques-uns des principaux domaines où la programmation linéaire a été largement et avec succès appliqué :

(1) Optimisation d'une raffinerie de pétrole.
(2) Répartition de la production.
(4) Problèmes de distribution.
(5) Planification financière et économique.

Vue d'ensemble

Programmation quadratique

$$\begin{Bmatrix} Max \\ Min \end{Bmatrix} f(x_1 \cdots x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots, x_n^2$$

Fonction objective linéaire

Sous réserve de m contraint linéaires

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \leq\geq= b_1$$
$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \leq\geq= b_2$$

$$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n \leq\geq= b_m$$

Programmation linéaire

$$\begin{Bmatrix} Max \\ Min \end{Bmatrix} f(x_1 \cdots x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

fonction objective non linéaire

sous réserve de m contraintes linéaire

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \leq\geq= b_1$$
$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \leq\geq= b_2$$

Programmation géométrique

$$\begin{Bmatrix} Max \\ Min \end{Bmatrix} f(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n) \text{ – fonction objective non linéaire}$$

Sous réserve de m contraintes non linéaire

$$\{g_1(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n) = 0$$
$$\{g_2(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n) = 0$$

$$\{g_{m-1}(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n) = 0$$
$$\{g_m(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n) = 0$$

Programmation mathématique ou Non linéaire

Trouver le vecteur $\vec{t}$ tel que :

Min fonction $g_0(\vec{t})$

Tel que $t_1 > 0, t_1 > 0, \cdots, t_n > 0$

et $g_1(\vec{t}) \leq 1$, $g_2(\vec{t}) \leq 1$

----

et $g_k(\vec{t}) = \sum_{j=1}^{k} P_j(\vec{t})$ et $P_j(\vec{t}) = c_j \prod_{i=1}^{j} t_i^{G_{i,j}}$.

2. QUELQUES DEFINITIONS IMPORTANTES

La forme générale d'un modèle de programmation linéaire se compose de : (i) un objectif à maximiser ou minimiser certains z quantité, appelée la fonction objective, qui s'exprime comme une combinaison linéaire des variables.

(ii) des contraintes non négligeables sur les variables qui sont des inégalités ou équation mettant en cause des combinaisons linéaires des variables.

(iii) des contraintes de positivité sur les variables pour s'assurer que chacun d'eux est positive ou nulle.

Il peut être exprimé mathématiquement comme suit :

Optimiser $z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots\cdots + c_nx_n$

Sous c/t

$$
\begin{array}{l}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{1,n}x_n \leq b_1 \,/ = /\, \geq b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{2,n}x_n \leq b_2 \,/ = /\, \geq b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + a_{i,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{i,n}x_n \leq b_i \,/ = /\, \geq b_i \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + a_{n,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{n,n}x_n \leq b_n \,/ = /\, \geq b_n .
\end{array}
$$

Tel que $x_i \geq, =, \leq 0,\ i = 1,2,3,\cdots,n$

$c_j\,(j = 1,2,3\cdots,n)$ (appelés les coefficients de coût)

$a_{i,j}(i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n)$ et $b_i(i = 1,2,\cdots,m)$ sont les paramètres du modèle.

Nous devrions inclure les coûts d'exploitation c (qui sont censés pour être constant, bien qu'il soit souvent commode de les omettre) dans la fonction objective. Cependant que nous changeons effectivement la fonction objective du bénéfice z'

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = z' - c$$

Où c représente le total de la valeur de la constante. Par conséquent, il est important, lors de la résolution des problèmes de programmation linéaires de ne pas oubliez pas d'ajouter de la valeur de tous les termes constants omises dans la fonction objective à la valeur maximale (ou minimale) de z afin de déterminer la valeur correcte du profit maximum (ou coût minimum). Maintenant, il est très important que nous sommes en mesure de convertir la forme générale d'un problème de programmation linéaire en une forme standard, car si nous avons un problème de programmation linéaire sous forme standard, nous pouvons obtenir quelques résultats théoriques très puissants.

3. *Theoreme de dualite*

Un modèle de programmation linéaire est de **forme classique**, si elle est exprimée sous la forme :

Maximiser $z = c^T x$

sous $A\vec{x} \le \vec{b}$, $\vec{x} \ge 0$.

Aucune restriction sur le signe de $\vec{b}$.

Pour convertir un modèle de programmation linéaire sous forme standard, nous procédons comme suit :

(1) Supprimer tout terme c constant de la fonction objectif en remplaçant :

$z' = \vec{c}^{\,T} \vec{x} + c$ par $z = \vec{c}^{\,T} \vec{x}$ tel que $z = z' - c$.

(2) Si le problème est un problème de minimisation :

Minimiser $z' = \vec{c}'^{T} \vec{x}$,

Le réécrire comme maximiser $z = \vec{c}^{\,T} \vec{x}$

Tel que : $z = -z'$ et $c = -c'$.